«КОПИЛКА ПРЕМУДРОСТЕЙ»

ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ УЧЕНИКОВ 5, 6, 7 КЛАССОВ

ЗАДАЧА 1.

Известный бизнесмен Андрей Крутой пришел в Госбанк, чтобы обменять несколько 50- и 100-долларовых купюр старого образца.

Ему было выдано 1999 купюр достоинством 1, 5 и 25 долларов.

Докажите, что его обсчитали.

ЗАДАЧА 2.

Три землекопа за два часа выкопали три ямы.

Сколько ям выкопают шесть землекопов за пять часов?

ЗАДАЧА 3.

Кот Матроскин и пес Шарик каждое утро бегают на речку умываться. Они выскакивают из дома одновременно и бегут по одной и той же тропинке. Скорость каждого из них постоянна, но Матроскин бежит в 3 раза быстрее Шарика, зато моется в 2 раза дольше, чем Шарик. Однажды Шарик, прибежав к речке, обнаружил, что не взял с собой полотенце. Он тут же побежал домой, схватил полотенце и прибежал к речке как раз в тот момент, когда Матроскин закончил умываться (бежал Шарик по той же тропинке и с той же скоростью, что и каждое утро).

Кто обычно прибегает домой раньше – Шарик или Матроскин или они прибегают домой одновременно?

ЗАДАЧА 4.

В Цветочном городе живет 14 коротышек. Они объединены в различные партии. По закону, партия должна состоять не менее чем из 3 коротышек, и две разные партии не могут состоять из одних и тех же членов. Кроме того, каждый коротышка может быть членом не более 2 партий.

Какое наибольшее число партий может быть в Цветочном городе?

ЗАДАЧА 5.

Во время шторма капитан корабля приказал выбросить за борт половину из 30 тюков с товарами, которые везли два купца. Купцы были в нерешительности: каждому было жаль выбрасывать свой груз. Видя это, капитан сказал: «Сделаем так: матросы расставят 30 тюков по кругу, а мы будем по кругу ходить и выбрасывать каждый девятый тюк, пока не выбросим половину тюков». Один из купцов подкупил матросов, и они сумели расставить тюки так, что 15 оставшихся на палубе тюков оказались с товарами одного купца.

Как были расставлены тюки?

ЗАДАЧА 6.
Футбольный мяч сшит из 32 лоскутков: белых шестиугольников и черных пятиугольников. Каждый черный лоскуток граничит только с белыми, а каждый белый - с тремя черными и тремя белыми. Сколько лоскутков белого цвета?

ЗАДАЧА 7.
Инженер ежедневно приезжал на станцию в одно и то же время, и в то же время за ним подъезжала машина, на которой он ехал на завод. Однажды инженер приехал на станцию на 55 мин раньше обычного. Сразу пошел навстречу машине и приехал на завод на 10 мин раньше, чем обычно.

Во сколько раз скорость инженера меньше скорости машины?

ЗАДАЧА 8.
В вагоне электропоезда ехали из города на дачу две подруги-школьницы.

«Я замечаю, – сказала одна из подруг, – что обратные дачные поезда нам встречаются через каждые 5 мин. Как ты думаешь, сколько дачных поездов прибывает в город в течение одного часа, если скорости поездов в обоих направлениях одинаковы?» «Конечно, 12, так как 60 : 5 = 12», – сказала вторая подруга. Но школьница, задавшая вопрос, не согласилась с решением подруги и привела ей свои соображения. А что вы думаете по этому поводу?

ЗАДАЧА 9.
В триседьмом царстве живут драконы. У каждого дракона одна, две или три головы,

а) Может ли у 40 % драконов быть 60 % голов?

б) Может ли у 40 % драконов быть 70 % голов?

ЗАДАЧА 10.
У филателиста Бори большое количество марок. Однажды он решил разместить их в большом альбоме, состоящем из 1000 страниц, так, чтобы на всех заполненных страницах марок было поровну (какие-то страницы в конце альбома могут остаться пустыми). Но когда Боря попробовал раскладывать по 7 марок на странице, то у него 5 марок осталось (но не все страницы были заполнены). Тогда он стал раскладывать сначала по 11 марок на странице, затем – по 13 марок на странице. Но снова у него оба раза осталось 5 марок. Наконец, когда Боря решил разложить по 23 марки на странице, то на этот раз у него осталось 6 марок.

Сколько марок в коллекции у Бори?

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.

Решение задачи 1.

Для решения этой задачи необходимо воспользоваться следующим известным утверждением: сумма любого числа четных чисел – четная, а нечетного числа нечетных чисел – нечетная. В нашем случае исходная сумма денег (сумма какого-то числа 50-долларовых и 100-долларовых купюр) – четная, а полученная сумма денег (сумма 1999 купюр по 1, 5 и 25 долларов) – нечетная.

Решение задачи 2.

Шесть землекопов за 2 часа выкопают 3 · 2 = 6 ям. Шесть землекопов за 10 часов выкопают 6·5=30 ям. Тогда шесть землекопов за 5 часов выкопают 30 : 2 = 15 ям.

Решение задачи 3.

Разделим дорогу от дома к речке на три участка одинаковой длины (см. рисунок) и эту длину примем за 1.

Введем новую единицу измерения – «шарик»; по определению, 1 «шарик» – это время, нужное Шарику, чтобы утром по дороге на речку пробежать участок длины 1.
По условию, когда Матроскин добегает до D (начинает умываться), Шарик как раз находится в точке B (ведь он бежит в 3 раза медленнее Матроскина). Следовательно, на дорогу от дома до речки (так же, как и на обратную дорогу) Матроскин затрачивает столько же времени, сколько нужно Шарику, чтобы пробежать отрезок длины 1, т. е. 1 «шарик».
Матроскин умывается 8 «шариков» (действительно, в тот день, когда Шарик забыл полотенце, он, как всегда, добежал до точки B, а Матроскин в этот момент начал умываться, затем Шарик пробежал 8 раз отрезок длины 1: от B к D (два участка длины 1), от D к A(три участка длины 1) и, наконец, от A к D уже с полотенцем (три участка длины 1), - и как раз Матроскин в этот момент умываться закончил). Далее, так как по условию Матроскин моется в два раза дольше Шарика, то Шарик моется 4 «шарика».
Остается подсчитать время, затраченное каждым из наших героев на дорогу от дома к речке, умывание и дорогу обратно, от речки к дому. Шарик: 3 + 4 + 3 = 10 «шариков»; Матроскин: 1 + 8 + 1 = 10 «шариков».
Следовательно, Матроскин и Шарик прибегают домой после умывания одновременно.

Решение задачи 4.

Пусть в каждой партии выдают партийные билеты. Если в цветочном городе k партий, то на руках у населения не менее 3k партийных билетов (ведь в каждой партии по условию не менее 3-х

членов). Но у каждого коротышки имеется не более 2-х партийных билетов (по условию каждый коротышка не может быть членом более 2-х партий). Следовательно, так как коротышек 14, всего партийных билетов не более 2 х 14 = 28 .
Поэтому 3k < или = 28, т. е. k < или = [28/3] = 9.
Остается привести пример вхождения 14 коротышек в 9 партий такой, чтобы:
1) в каждой партии было не меньше 3 членов;
2) каждый коротышка являлся бы членом не более 2-х партий;
3) никакие две разные партии не состоят из одних и тех же членов (при выводе оценки k < или = 9 мы использовали только условия 1) и 2)).
Пронумеруем коротышек числами от 1 до 14. Условимся коротышек, входящих в какую-либо партию, заключать в фигурные скобки {}. Нужный пример иллюстрируют, например, партии:
{1,2,3}, {4,5,6}, {7,8,9}, {10,11,12}, {13,14,1}, {2,3,4}, {5,6,7}, {8,9,10}, {11,12,13}.
Всего 9 партий.

Решение задачи 5.

Начертим круг, отметим на нем 30 палочек и пронумеруем их от 1 до 30. Начиная счет с цифры 1, перечеркиваем девятую палочку, затем восемнадцатую, затем двадцать седьмую и продолжаем этот процесс, вычеркивая каждую девятую из не перечеркнутых ранее палочек. Таким образом, будут перечеркнуты палочки с номерами 5, 6, 7, 8, 9, 12, 16, 18, 19, 22, 23, 24, 26, 27, 30. Значит, купец просил матросов расставить тюки следующим образом: 4 своих, 5 чужих, 2 своих, 1 чужой, 3 своих, 1 чужой, 1 свой, 2 чужих, 2 своих, 3 чужих, 1 свой, 2 чужих, 2 своих, 1 чужой.

Решение задачи 6.

Обозначим искомое число лоскутков белого цвета через х. Тогда лоскутков черного цвета будет 32 - х. Чтобы составить уравнение, подсчитаем двумя способами количество границ белых лоскутков с черными. Каждый белый лоскут граничит с тремя черными, следовательно, число границ равно 3х. С другой стороны, каждый черный лоскут граничит с пятью белыми и число границ равно 5(32 – х). Получаем уравнение 3х = 5(32 – х), т.е. 8х = 160 и х = 20.

Решение задачи 7.

За 10 мин машина проходит путь, равный двойному расстоянию от станции до места встречи инженера с машиной. Значит, путь от станции до места встречи машина проходит за 5 мин. На месте встречи машина была за 5 мин до времени обычного приезда инженера на станцию, значит, путь от станции до места встречи инженер шел 55 мин - 5 мин = 50 мин. Следовательно, скорость инженера в 50 : 5 = 10 раз меньше скорости машины.

Решение задачи 8.

Скорости поездов одинаковы, поэтому за одно и тоже время они проходят одно и тоже расстояние. Из сказанного выше следует, что в город прибудут в течение одного часа только

дачные поезда встречающиеся в первой половине часа (30 минут), а дачные поезда встречающиеся во второй половине часа не будут успевать доходить до города за оставшееся время.
Значит, в течение одного часа в город прибывает 30: 5 = 6 дачных поездов.

Решение задачи 9.

а) Покажем, что у 40% драконов может быть 60% голов. Пусть в этом царстве живет 100 драконов: 40 драконов с одной головой, 20 – с двумя головами и 40 – с тремя. Тогда число голов у всех драконов равно 40 • 1 + 20 • 2 + 40 • 3 = 200. При этом все 40 трехглавых драконов, что составляет 40% от общего числа драконов, имеют 40 • 3 = 120 голов, что составляет 120/200 • 100% = 60% от общего числа голов.
б) Пусть число драконов равно x, а общее число голов у них равно y. Предположим, что какие-то 40% драконов имеют 70% голов. Тогда, поскольку каждый из этих драконов имеет не более трех голов, то 0,7y < или = 3 • 0,4x. С другой стороны, поскольку остальные 60% драконов имеют 30% голов и у каждого из них не менее одной головы, то 0,6x < или = 0,3y. Но эти неравенства не могут выполняться одновременно, так как они равносильны соответственно 7y < или = 12x и 12x < или = 6y. Поэтому у 40% драконов не может быть 70% голов.

Решение задачи 10.

Пусть у Бори x марок. Согласно условию x – 5 делится на 7, на 11 и на 13. Следовательно, поскольку 7,11 и 13 – простые числа, то x – 5 делится на их произведение, т. е. на 7 • 11 • 13 = 1001. Поэтому x – 5 = 1001k для некоторого натурального k, откуда x = 1001k + 5 .
Далее, согласно условию x – 6 делится на 23. Поэтому x – 6 = 23m для некоторого натурального m. В результате, получим
1001k – 1 = 23m. (*)
Остается только найти натуральные k и m, удовлетворяющие этому равенству. При этом, поскольку согласно условию x/7<1000 и, значит, x<7000, то достаточно рассмотреть k = 1,2,..., 6. Нетрудно убедиться, что только при k = 2 из уравнения (*) получится натуральное значение m = 87.
Поэтому находим единственное значение x = 1001•2 + 5 = 2007.

Список литературы

1. Виленкин Н.Я., Жохов В.И., Чесноков А.С., Шварцбурд С.И. Математика 6. – М.: Мнемозина, 2012.
2. Мерзляк А.Г., Полонский В.В., Якир М.С. Математика 6 класс. – Гимназия. 2006.
3. Депман И.Я., Виленкин Н.Я. За страницами учебника математики. – М.: Просвещение, 1989.
4. Рурукин А.Н., Чайковский И.В. Задания по курсу математика 5–6 класс. – М.: ЗШ МИФИ, 2011.

5. Рурукин А.Н., Сочилов С.В., Чайковский К.Г. Математика 5–6. Пособие для учащихся 6-х классов заочной школы МИФИ. – М.: ЗШ МИФИ, 2011.
6. Шеврин Л.Н., Гейн А.Г., Коряков И.О., Волков М.В. Математика: Учебник-собеседник для 5–6 классов средней школы. – М.: Просвещение, Библиотека учителя математики, 1989.

Дополнительные рекомендованные ссылки на ресурсы сети Интернет

1. Математика (Источник).
2. Интернет-портал Math-portal.ru (Источник).